Activiteit 13

De arme cartograaf - kaarten kleuren

Samenvatting

Veel optimalisatieproblemen hebben te maken met situaties waar bepaalde gebeurtenissen niet op hetzelfde moment mogen of kunnen gebeuren of waar mensen of een groep objecten niet gelijktijdig op meerdere plekken kunnen zijn. Bijvoorbeeld iedereen die wel eens een rooster heeft proberen te maken of een vergadering moest plannen heeft te maken met de beperkingen van de mensen die daarbij betrokken zijn.
Veel van deze moeilijkheden vinden we terug in het kaarten kleur probleem, waarin kleuren voor landen op een kaart gekozen moeten worden, maar zo dat aangrenzende landen een andere kleur krijgen. Deze activiteit gaat over dit probleem.

Kerndoelen

- Rekenen: Getallen groep 4 en hoger. Het ontdekken van getallen in andere grondtallen. Het weergeven van getallen in grondtal 2.
- Rekenen: Algebra groep 4 en hoger. Een patroon voortzetten en regels bepalen voor een patroon. Patronen en relaties in de machten van 2.

Vaardigheden

- Probleem oplossen
- Logisch redeneren
- Algoritmische procedures en complexiteit
- Het delen van ervaringen

Leeftijd

- 7 jaar en ouder

Materiaal

- Een whiteboard of vergelijkbaar schrijfoppervlak.

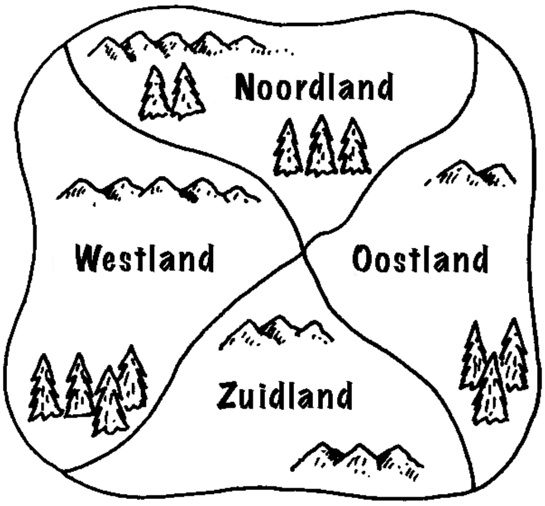
Iedere leerling heeft nodig:

- een kopie van een of meer van de werkbladen
- kleine verplaatsbare markers (bijvoorbeeld pokerfiches of iets dergelijks)
- vier kleurpotloden van verschillende kleur

Kaartkleuren

Introductie

Deze activiteit draait om een verhaal waarin de leerlingen is gevraagd om een cartograaf, een kaartenmaker, te helpen landen op een kaart in te kleuren. Het maakt niet uit welke kleur een land krijgt, als het maar een andere kleur is dan de buurlanden.



Deze kaart laat bijvoorbeeld vier landen zien. Als we Noordland rood kleuren dan kunnen Westland en Oostland niet rood zijn omdat dan de grens met Noordland dan slecht te zien zou zijn. We kunnen Westland groen kleuren, maar ook Oostland omdat deze landen geen grens delen met elkaar (als landen elkaar raken met alleen maar een punt telt dit niet als een grens delen en daarom kunnen ze dezelfde kleur krijgen). Zuidland kan ook rood gekleurd worden en dus hebben we voor deze kaart maar 2 kleuren nodig.

In ons verhaal is de cartograaf heel arm en heeft geen geld om veel verschillende kleuren te kopen, dus hebben we de wens zo min mogelijk kleuren te gebruiken.

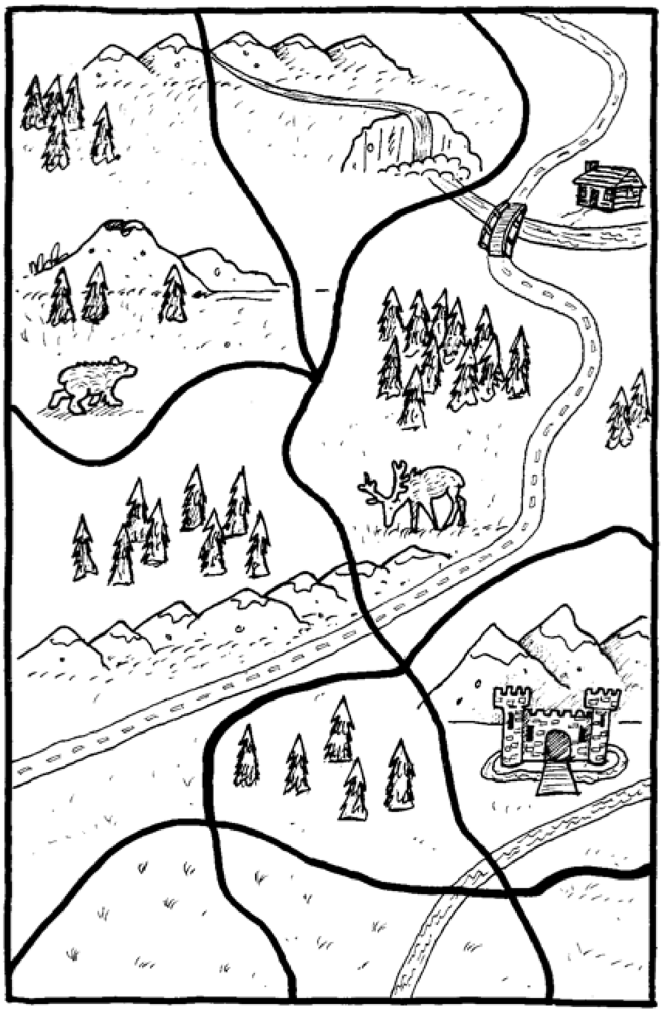
Discussie

Beschrijf het probleem waar de leerlingen aan gaan werken, demonstreer de opdracht op het bord. Deel het werkblad 1 uit. Deze kaart kan op de juiste manier ingekleurd worden

door maar 2 kleuren te gebruiken. De opdracht lijkt heel moeilijk als je maar 2 kleuren mag gebruiken, maar uiteindelijk zal deze opdracht makkelijker blijken dan bij het gebruik van meer kleuren bij de andere kaarten, omdat er maar heel weinig keuze is voor de kleur van ieder land.
Laat de leerlingen de kaart kleuren met maar 2 kleuren. Al snel zullen ze de "moet-zo-zijn" regel ontdekken: als een land is ingekleurd moet ieder aangrenzende land de andere kleur krijgen. Deze regel moet telkens toegepast worden totdat alle landen zijn ingekleurd. Het beste is als de leerlingen deze regel zelf ontdekken in plaats van het uitleggen, omdat ze zo een beter begrip krijgen voor het proces.
Als de leerlingen klaar zijn met de opdracht kan je ze het volgende werkblad geven om te proberen.
De leerlingen zullen ook ontdekken dat het beter is om tijdelijke plaatsvervangers te gebruiken voor de kleuren, in plaats van het meteen beginnen te kleuren van de landen. Zo kunnen ze later makkelijker fouten herstellen en kleuren veranderen.
Oudere leerlingen kan je vragen of ze uit kunnen leggen hoe ze tot het minimum aantal benodigde kleuren zijn gekomen. Bijvoorbeeld, er zijn op zijn minst 3 kleuren nodig voor deze kaart omdat er een groep van 3 landen is (de grootste 3) die allemaal een grens hebben met de andere 2 landen in die groep.
Als een leerling heel snel klaar is met alle werkbladen kan je hem of haar vragen een kaart te bedenken die 5 verschillende kleuren nodig heeft. Het is bewezen dat iedere kaart ingekleurd kan worden met maar 4 kleuren, dus dit houdt ze wel even bezig! Onze ervaring leert ons dat ze al snel met een kaart komen waarvan ze denken dat deze 5 kleuren nodig heeft, maar natuurlijk is het mogelijk om een 4-kleuren oplossing te vinden voor hun kaart.

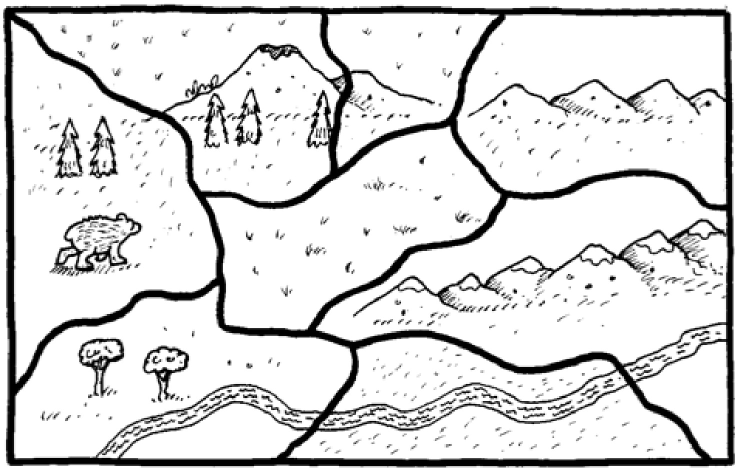
Werkblad: kaartkleuren 1

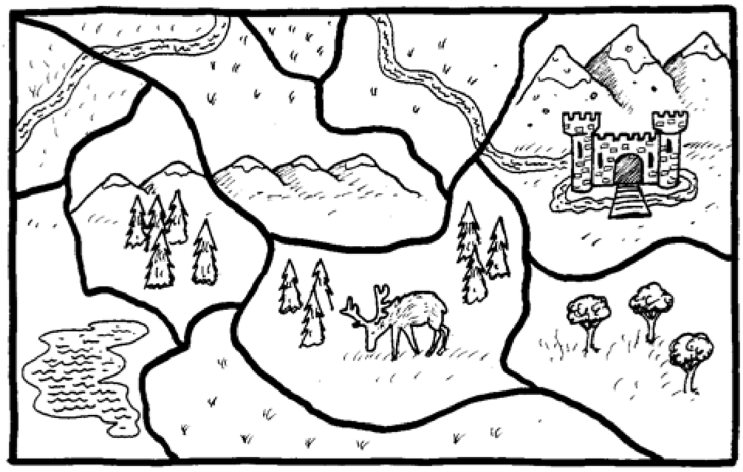
Kleur de landen op deze kaart in met zo min mogelijk verschillende kleuren, zo dat landen die aan elkaar grenzen verschillende kleuren krijgen.



Werkblad: kaartkleuren 2

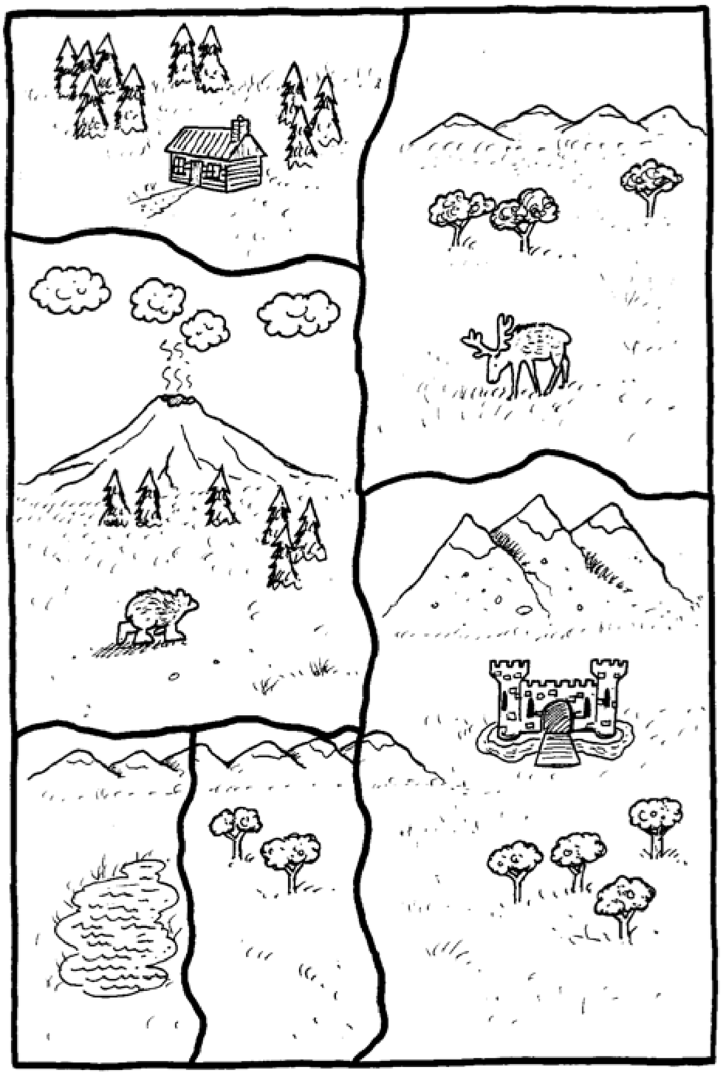
Kleur de landen op deze kaart in met zo min mogelijk verschillende kleuren, zo dat landen die aan elkaar grenzen verschillende kleuren krijgen.





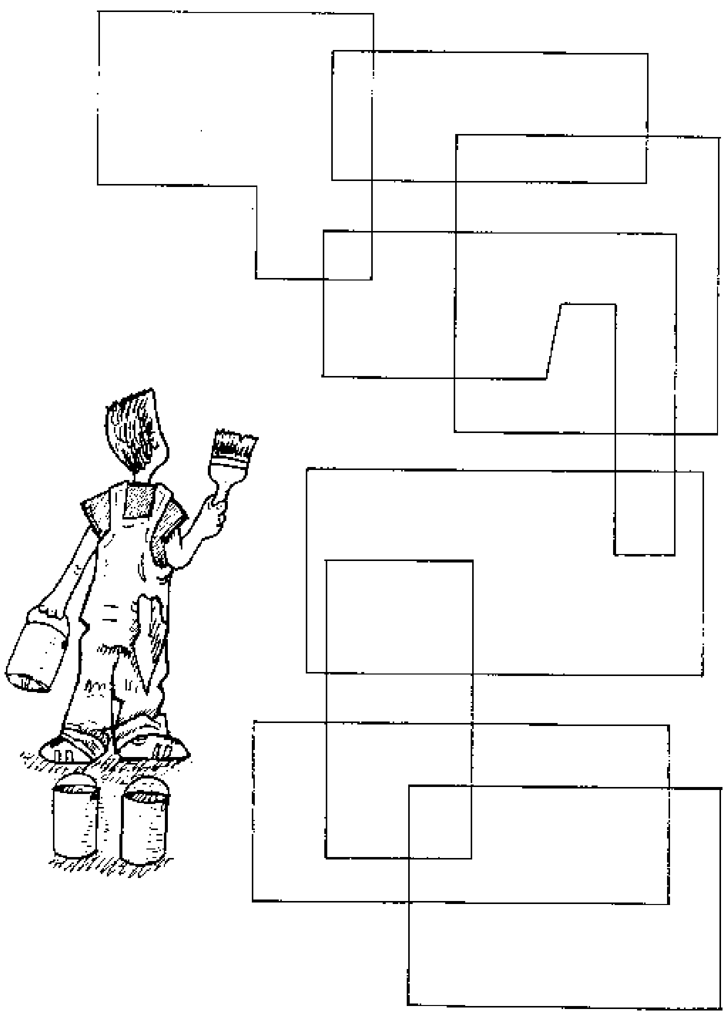
Werkblad: kaartkleuren 3

Kleur de landen op deze kaart in met zo min mogelijk verschillende kleuren, zo dat landen die aan elkaar grenzen verschillende kleuren krijgen.



Werkblad: kaartkleuren 4

Kleur de landen op deze kaart in met zo min mogelijk verschillende kleuren, zo dat landen die aan elkaar grenzen verschillende kleuren krijgen.



Variaties en uitbreidingen

Er is een makkelijke manier om kaarten te maken die maar 2 kleuren nodig hebben, zoals je op werkblad 4 ziet. Deze kaart is getekend door gesloten vormen (lijnen die weer eindigen bij hun begin) over elkaar heen te leggen. Je kan elk aantal van deze vormen, en van iedere vorm over elkaar heen leggen en je komt toch altijd tot een aantal van 2 benodigde kleuren. Leerlingen kunnen zelf experimenteren met dit soort kaarten.

Vier kleuren is het maximum aantal kleuren dat je nodig hebt om een kaart op een papier of een bol in te kleuren. Men kan zich afvragen (zoals wetenschappers die daarvoor betaald worden) hoeveel kleuren er nodig zijn voor kaarten op ander soort oppervlaktes, zoals een torus (donut-vorm). In dit geval kan het zo zijn dat je 5 kleuren nodig hebt, het maximum is 5. Leerlingen kunnen ook hiermee experimenteren.

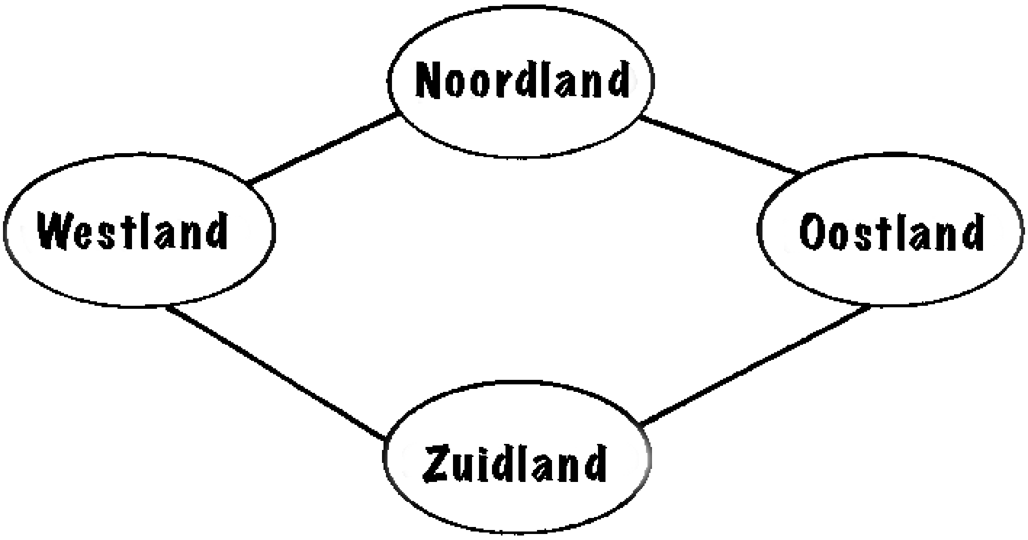
Er zijn nog veel andere leuke variaties te bedenken op het kaarten-kleur-probleem die kunnen leiden in richtingen waar we nog weinig van weten. Als ik bijvoorbeeld zelf een kaart teken dan weet ik, als ik slim werk, maar 4 kleuren nodig heb. Maar stel je voor dat ik niet alleen werk. Maar met een onhandige (of zelfs tegenwerkende) partner en we om de beurt een kleur kiezen voor een land. Aannemende dat ik zo slim mogelijk werk en mijn ‘partner’ alleen ‘legaal’ kleuren kiest als we om de beurt een land in kleuren. Hoeveel verschillende kleuren moeten er dan op tafel liggen om legale maar niet slimme (of zelfs tegenwerkende) kleur keuzes van mijn partner weer goed te maken? Het maximum is onbekend! In 1992 is bewezen dat het aantal van 33 kleuren genoeg is, maar in 2008 was dit verbeterd door het bewijs dat 17 kleuren al genoeg is, maar we weten nog steeds niet hoe veel er echt nodig zijn. (Experts vermoeden dat dat aantal op minder dan 10 ligt). Leerlingen kunnen dit als een spel gaan zien. Een spel van 2 personen waarbij een de tegenstander zo veel mogelijk kleuren moet laten gebruiken.

Een andere variant van het kaarten kleuren staat bekend als imperium kleuren, we beginnen met 2 verschillende kaarten op 2 vellen papier met allebei evenveel landen. Ieder land op 1 van de kaarten (zeg, de aarde) is samen met een exact 1 ander land op de andere kaart (kunnen bijvoorbeeld kolonies op Mars zijn). Bovenop de bestaande eisen van kleuren, kleuren van een land op beide kaarten moet een andere kleur zijn dan een aangrenzend land, komt hier nog bij dat ieder land op aarde dezelfde kleur moet krijgen als zijn kolonie op Mars. Hoe veel kleuren hebben we nodig voor dit probleem? Het antwoord is tot nu toe nog onbekend.

Waar gaat dit eigenlijk over?

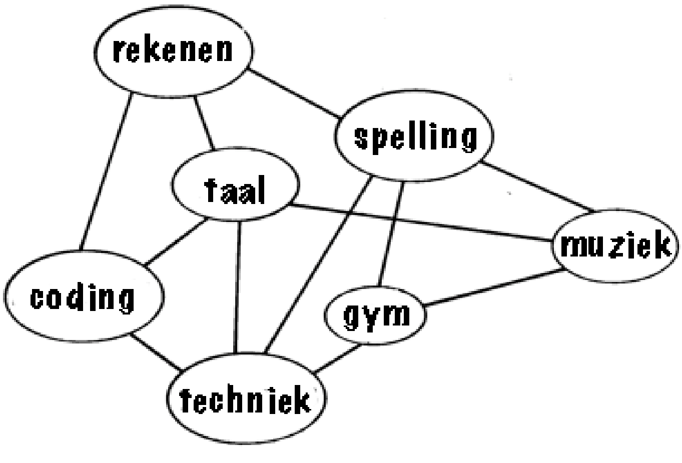
Het kaartenkleuren-probleem waarmee we in deze activiteit hebben gewerkt is essentieel om het minimum aantal kleuren te vinden - 2,3 of 4 - dat nodig is om een bepaalde kaart in te kleuren. Het vermoeden dat iedere kaart ingekleurd kan worden met maximaal 4 kleuren is voor het eerst beschreven in 1852, maar het bleef onbewezen tot 1976. De computerwetenschap zit nog vol met onopgeloste problemen, en wetende dat de vier-kleuren-stelling pas is bewezen na meer dan 120 jaar aandacht van vele onderzoekers is een aanmoediging voor diegenen die nu aan andere problemen werken waarvan de oplossing al decennia op zich laat wachten.

Kaarten kleuren hoort bij een algemene verzameling van problemen die aangeduid wor-



den als “het kleuren van grafen”. Een graaf in de computerwetenschap is een abstracte representatie van relaties. Hierboven hebben we de kaart die we als eerste bekeken als graaf getekend. Landen zijn punten (knopen) geworden en de landen zijn verbonden door een lijn (kant) wanneer ze een grens delen.

Zoals al ter sprake kwam in activiteit 9 over Modderstad, wordt de term “graaf” in de computerwetenschap gebruikt voor figuren met cirkels, de knopen, die objecten weergeven met lijnen daartussen die een soort relatie tussen de knopen aangeven. De graaf hierboven laat de kaart van het begin van deze activiteit zien. De knopen zijn de landen en de lijnen laten zien dat deze landen een gezamenlijke grens hebben. Bij de graaf is het de bedoeling dat de knopen die door een lijn met elkaar verbonden zijn niet dezelfde kleur mogen krijgen volgens de kleurenregel die we gesteld hadden. Anders dan op een kaart, is er bij een graaf geen limiet aan kleuren die mogelijk nodig zijn, omdat er met behulp van lijnen veel meer relaties toegevoegd kunnen worden, het tweedimensionale karakter van een kaart beperkt zich in het weergeven van relaties. Het “graaf-kleur-probleem” is het



minimum aantal kleuren te vinden dat nodig is voor een bepaalde graaf.

In de graaf hierboven geven de knopen schoolvakken aan. Een lijn tussen de vakken betekent dat op zijn minst 1 leerling beide vakken volgt en deze vakken dus niet tegelijk gegeven kunnen worden. Door het zo weer te geven, wordt het maken van een schoolrooster precies hetzelfde probleem als het kleurprobleem, waar de verschillende kleuren nu verschillende tijdstippen aangeven. In de computerwetenschap krijgen graaf-kleur-algoritmes veel aandacht. Ze worden gebruikt voor veel dagelijkse problemen, hoewel ze waarschijnlijk nooit worden gebruikt bij het kleuren van kaarten! Onze arme cartograaf is maar verzonnen.

Er bestaan letterlijk duizend andere problemen die gebaseerd zijn op grafen. Sommige worden ergens anders in dit boek beschreven, zoals bij activiteit 9, de minimaal opspannende boom, en bij de dominerende verzamelingen bij activiteit 14. Grafen zijn een zeer algemene manier om data weer te geven en kunnen gebruikt worden om allerlei situaties schematisch weer te geven, zoals een kaart met wegen en kruispunten, verbindingen tussen atomen in een molecuul, computernetwerken, verbindingen tussen onderdelen op een printplaat en relaties tussen opdrachten bij een zeer groot project. Om deze reden vinden computerwetenschappers problemen die met een graaf weergegeven kunnen worden al heel lang zeer fascinerend.

Veel van deze problemen zijn erg ingewikkeld - het vraagstuk is niet per se ingewikkeld, maar ze kunnen heel veel tijd kosten om op te lossen. Neem bijvoorbeeld een op het oog niet eens zo heel groot probleem, het maken van het meest efficiënte rooster voor een school met 30 leraren en 800 leerlingen kan jaren, zelfs eeuwen in beslag nemen voor een computer, zelfs met het beste algoritme. De oplossing van dit probleem is allang irrelevant lang voordat de oplossing gevonden is en de kans is zelfs groot dat de computer al kapot is voor het een oplossing heeft gevonden! Zulke problemen worden in de praktijk alleen opgelost doordat we niet de allerbeste oplossing accepteren, maar een acceptabele oplossing ook wel goed vinden. Als we erop zouden staan dat we gegarandeerd de beste oplossing zouden willen, zou dit probleem onpraktische groot, oftewel onhandelbaar zijn. De computertijd die we nodig hebben om kleurproblemen aan te pakken neemt exponentieel toe met de grootte van de graaf. Neem het kaartkleurprobleem. Dat kan opgelost worden door alle mogelijk manieren van kleuren toe te passen. We weten dat er een maximum van 4 kleuren nodig is, dus we moeten iedere combinatie van inkleuren van de 4 kleuren uit proberen. Als er een n aantal landen is, dan zijn er 4 tot de n-de combinaties mogelijk. En dit aantal groeit dus razendsnel, voor ieder land dat toegevoegd wordt maakt het aantal mogelijke combinaties al 4 keer zo groot en duurt het dus ook 4 keer zo lang om een oplossing te vinden. Zelfs als we een computer uitvinden die het probleem voor, laten we zeggen, 50 landen in een uur op kan lossen, heeft het toevoegen van 1 extra land 4 uur extra nodig en als we dan 10 landen toevoegen duurt het al meer dan een jaar om tot een oplossing te komen. Dit soort problemen verdwijnen niet door het simpel uitvinden van nog snellere computers, het probleem is te groot!

Graafkleuren is een goed voorbeeld van een probleem waar de tijd voor het vinden van een oplossing exponentieel groeit. Voor kleine voorbeelden van het probleem, zoals de kleine kaarten in deze activiteit, is het vrij gemakkelijk een optimale oplossing te vinden, maar zo gauw het aantal landen boven de 10 uitkomt wordt het al een hels karwei om dit met de hand te doen en met honderd of meer landen kan het zelfs voor een computer heel lang duren om alle combinaties uit te proberen om de kaart te kleuren en zo de meest optimale te vinden.

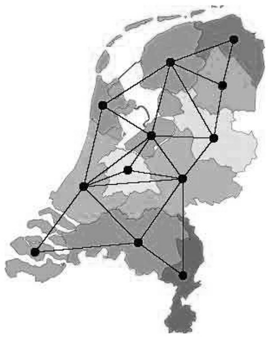
Veel dagelijkse problemen zijn precies zo, maar moeten sowieso opgelost worden. Computerwetenschappers gebruiken methoden die goede, maar niet perfecte, oplossingen geven. Deze heuristische technieken leveren vaak oplossingen die zeer dicht bij de optimale oplossing liggen, zijn vaak snel te berekenen en geven oplossingen die prima in het dagelijks leven te gebruiken zijn. Voor scholen is het in de meeste gevallen geen probleem om een klaslokaal meer te gebruiken dan in de optimale situatie en de arme cartograaf zal het vast niet verschrikkelijk vinden om een kleur te veel te gebruiken bij het inkleuren van een kaart.

Niemand heeft ooit bewezen dat er geen efficiënte manier is om dit soort problemen op te lossen met de computer, maar ook niemand heeft ooit bewezen dat er wel efficiënte manier is. Computerdeskundigen denken niet dat er ooit een efficiënte manier gevonden zal worden. We zullen nog meer over dit probleem leren in de volgende 2 activiteiten.

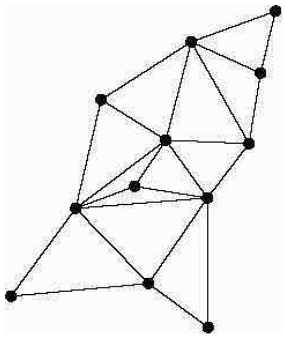
Verder lezen

Harel behandelt de vierkleuren-stelling en zijn geschiedenis in *Algorithmics*. Meer aspecten van kaartkleuren worden behandeld in *This is MEGA-Mathematics!* van Casey en Fellows. Het boek *Graph Colorings* (Kubale, 2004) beschrijft ook de geschiedenis van het probleem. Er zijn vele websites over het onderwerp.

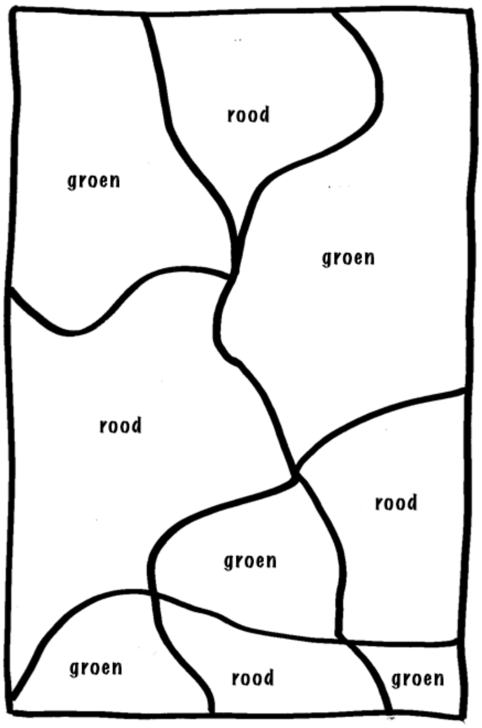
Voor het Nederlandse taalgebied is hoofdstuk 6 uit de gratis syllabus Discrete Wiskunde http://www.praktijk.nu/userfiles/downloads/DisWis_Syllabus_4.3.pdf interessant:



Het kleuren van de provincies zodat aan elkaar grenzende provincies niet dezelfde kleur krijgen, is hetzelfde als het kleuren van de punten in de graaf rechts, zodanig dat punten waartussen een lijn loopt, niet dezelfde kleur krijgen.



Oplossingen en hints

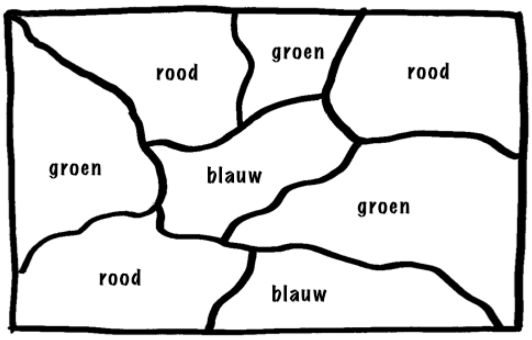


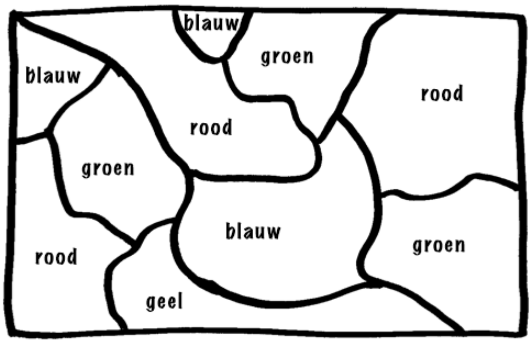
Werkblad 1

Dit is de enige mogelijke oplossing van werkblad 1 (natuurlijk is de keuze van kleuren aan de leerling, maar er zijn maar 2 kleuren nodig).

Werkblad 2

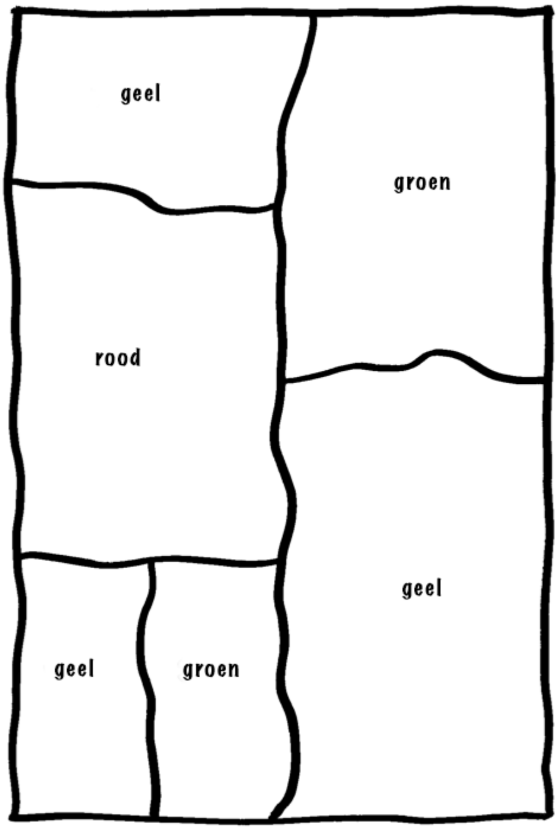
De bovenste kaart van werkblad 2 kan op de juiste manier gekleurd worden met behulp van 3 kleuren. De onderste kaart heeft er 4 nodig. Hier zijn 2 mogelijke oplossingen.

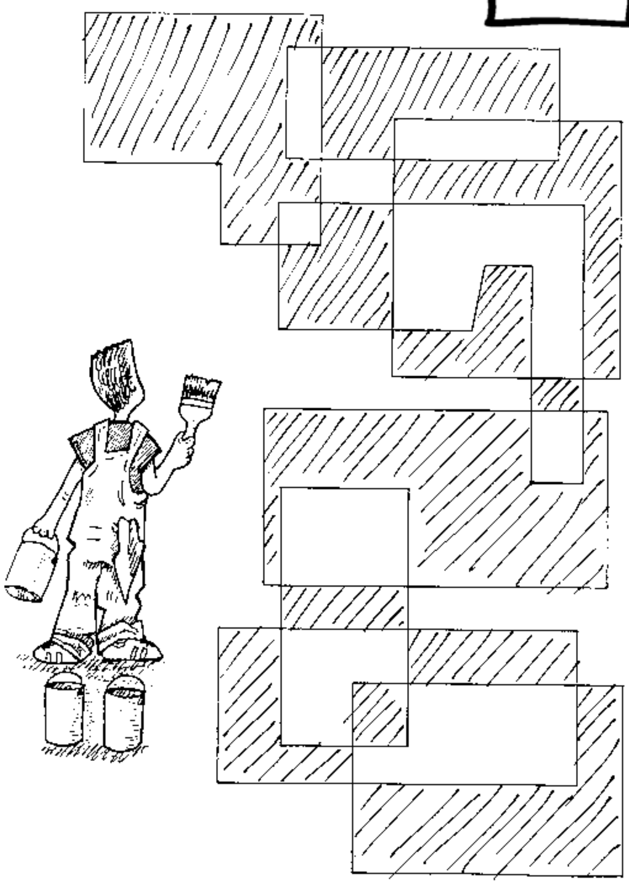




Werkblad 3

De kaart op werkblad 3 is een simpele 3-kleuren kaart met dit als een mogelijke oplossing: .





Werkblad 4

De oplossing voor werkblad 4 met het gebruik van twee kleuren (gearceerd en wit).